

`$SPAD/input schaum6.input`

Timothy Daly

June 15, 2008

Contents

1	[1]:14.125	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$	3
2	[1]:14.126	$\int \frac{x \, dx}{x^2 + a^2}$	4
3	[1]:14.127	$\int \frac{x^2 \, dx}{x^2 + a^2}$	5
4	[1]:14.128	$\int \frac{x^3 \, dx}{x^2 + a^2}$	6
5	[1]:14.129	$\int \frac{dx}{x(x^2 + a^2)}$	7
6	[1]:14.130	$\int \frac{dx}{x^2(x^2 + a^2)}$	9
7	[1]:14.131	$\int \frac{dx}{x^3(x^2 + a^2)}$	10
8	[1]:14.132	$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$	12
9	[1]:14.133	$\int \frac{x \, dx}{(x^2 + a^2)^2}$	13
10	[1]:14.134	$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}$	14
11	[1]:14.135	$\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + a^2)^2}$	15
12	[1]:14.136	$\int \frac{dx}{x(x^2 + a^2)^2}$	16
13	[1]:14.137	$\int \frac{dx}{x^2(x^2 + a^2)^2}$	18
14	[1]:14.138	$\int \frac{dx}{x^3(x^2 + a^2)^2}$	19
15	[1]:14.139	$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$	21

16 [1]:14.140	$\int \frac{x \, dx}{(x^2 + a^2)^n}$	22
17 [1]:14.141	$\int \frac{dx}{x(x^2 + a^2)^n}$	23
18 [1]:14.142	$\int \frac{x^m dx}{(x^2 + a^2)^n}$	24
19 [1]:14.143	$\int \frac{dx}{x^m(x^2 + a^2)^n}$	24

```

1 [1]:14.125      
$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$$


$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

(*)
)spool schaum6.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(1/(x^2+a^2),x)
--R
--R
--R      x
--R      atan(-)
--R      a
--R      (1)  -----
--R      a
--R
--E                                         Type: Union(Expression Integer,...)

--S 2
bb:=(1/a)*atan(x/a)
--R
--R      x
--R      atan(-)
--R      a
--R      (2)  -----
--R      a
--R
--E                                         Type: Expression Integer

--S 3      14:125 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R      (3)  0
--R
--E                                         Type: Expression Integer

```

```

2 [1]:14.126      
$$\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx$$


$$\int \frac{x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2)$$



$$\langle * \rangle + \equiv$$

)clear all

--S 4
aa:=integrate(x/(x^2+a^2),x)
--R
--R
--R      2      2
--R      log(x  + a )
--R      (1)  -----
--R                  2
--R
--R                                         Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 5
bb:=(1/2)*log(x^2+a^2)
--R
--R      2      2
--R      log(x  + a )
--R      (2)  -----
--R                  2
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 6      14:126 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R      (3)  0
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E

```

3 [1]:14.127 $\int \frac{x^2}{x^2 + a^2} dx$

$$\int \frac{x^2}{x^2 + a^2} = x - a \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 7
aa:=integrate(x^2/(x^2+a^2),x)
--R
--R
--R      x
--R      (1)  - a atan(-) + x
--R                  a
--R
--E                                         Type: Union(Expression Integer,...)

--S 8
bb:=x-a*atan(x/a)
--R
--R      x
--R      (2)  - a atan(-) + x
--R                  a
--R
--E                                         Type: Expression Integer

--S 9      14:127 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R      (3)  0
--R
--E                                         Type: Expression Integer

```

4 [1]:14.128

$$\int \frac{x^3}{x^2 + a^2} dx$$

$$\int \frac{x^3}{x^2 + a^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(x^2 + a^2)$$

(*)+≡
)clear all

--S 10
aa:=integrate(x^3/(x^2+a^2),x)
--R
--R
--R
$$(1) \frac{-a \log(x^2 + a^2) + x^2}{2}$$

--R
--E Type: Union(Expression Integer,...)

--S 11
bb:=x^2/2-a^2/2*log(x^2+a^2)
--R
--R
--R
$$(2) \frac{-a \log(x^2 + a^2) + x^2}{2}$$

--R
--E Type: Expression Integer

--S 12 14:128 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3) 0
--R
--E Type: Expression Integer

5 [1]:14.129 $\int \frac{dx}{x(x^2 + a^2)}$

$$\int \frac{1}{x(x^2 + a^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \left(\frac{x^2}{x^2 + a^2} \right)$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 13
aa:=integrate(1/(x*(x^2+a^2)),x)
--R
--R
--R      2      2
--R      - log(x  + a ) + 2log(x)
--R      (1) -----
--R                  2
--R                  2a
--R
--R                                         Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 14
bb:=1/(2*a^2)*log(x^2/(x^2+a^2))
--R
--R      2
--R      x
--R      log(-----)
--R      2      2
--R      x  + a
--R      (2) -----
--R                  2
--R                  2a
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 15
cc:=aa-bb
--R
--R
--R      2      2      x
--R      - log(x  + a ) + 2log(x) - log(-----)
--R                                         2      2
--R                                         x  + a
--R      (3) -----
--R                  2
--R                  2a

```

```

--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 16
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
--R
--R           a
--R   (4)  log(--) == - log(b) + log(a)
--R           b
--R                                         Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 17
dd:=divlog cc
--R
--R           2
--R   - log(x ) + 2log(x)
--R   (5)  -----
--R           2
--R           2a
--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 18
logpow:=rule(log(a^n) == n*log(a))
--R
--R           n
--R   (6)  log(a ) == n log(a)
--R                                         Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 19      14:129 Schaums and Axiom agree
ee:=logpow dd
--R
--R   (7)  0
--R                                         Type: Expression Integer
--E

```

6 [1]:14.130 $\int \frac{dx}{x^2(x^2 + a^2)}$

$$\int \frac{1}{x^2(x^2 + a^2)} = -\frac{1}{a^2 x} - \frac{1}{a^3} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$(*)+≡$$

$$)\text{clear all}$$

--S 20
aa:=integrate(1/(x^2*(x^2+a^2)),x)
--R
--R
--R
--R
$$(1) \frac{-x \operatorname{atan}\left(\frac{-x}{a}\right)}{a^3}$$
--R
--R
--E
 Type: Union(Expression Integer,...)

--S 21
bb:=-1/(a^2*x)-1/a^3*atan(x/a)
--R
--R
--R
--R
$$(2) \frac{-x \operatorname{atan}\left(\frac{-x}{a}\right)}{a^3}$$
--R
--R
--E
 Type: Expression Integer

--S 22 14:130 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R
$$(3) 0$$
--R
--E
 Type: Expression Integer

7 [1]:14.131 $\int \frac{dx}{x^3(x^2 + a^2)}$

$$\int \frac{1}{x^3(x^2 + a^2)} = -\frac{1}{2a^2 x^2} - \frac{1}{2a^4} \ln \left(\frac{x^2}{x^2 + a^2} \right)$$

$$\langle * \rangle + \equiv$$

$$)clear all$$

--S 23
aa:=integrate(1/(x^3*(x^2+a^2)),x)
--R
--R
--R
--R
$$(1) \frac{x^2 \log(x^2 + a^2) - 2x^2 \log(x) - a^2}{2a^2 x^4}$$
--R
--R
--E
Type: Union(Expression Integer,...)

--S 24
bb:=-1/(2*a^2*x^2)-1/(2*a^4)*log(x^2/(x^2+a^2))
--R
--R
--R
$$(2) \frac{-x^2 \log(\frac{x^2}{x^2 + a^2}) - a^2}{2a^2 x^4}$$
--R
--R
--E
Type: Expression Integer

--S 25
cc:=aa-bb
--R
--R
--R
$$(3) \frac{\log(x^2 + a^2)^2 - 2\log(x) + \log(\frac{x^2}{x^2 + a^2})}{2a^4}$$
--R
--R

```

--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 26
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
--R
--R           a
--R   (4)  log(-) == - log(b) + log(a)
--R           b
--R                                         Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 27
dd:=divlog cc
--R
--R           2
--R           log(x ) - 2log(x)
--R   (5)  -----
--R           4
--R           2a
--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 28
logpow:=rule(log(a^n) == n*log(a))
--R
--R           n
--R   (6)  log(a ) == n log(a)
--R                                         Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 29      14:131 Schaums and Axiom agree
ee:=logpow dd
--R
--R   (7)  0
--R                                         Type: Expression Integer
--E

```

```

8 [1]:14.132      
$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$$


$$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

(*)+≡
)clear all

--S 30
aa:=integrate(1/((x^2+a^2)^2),x)
--R
--R
--R      2      2      x
--R      (x  + a )atan(-) + a x
--R                           a
--R      (1)  -----
--R                  3 2      5
--R                  2a x  + 2a
--R
                                         Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 31
bb:=x/(2*a^2*(x^2+a^2))+1/(2*a^3)*atan(x/a)
--R
--R      2      2      x
--R      (x  + a )atan(-) + a x
--R                           a
--R      (2)  -----
--R                  3 2      5
--R                  2a x  + 2a
--R
                                         Type: Expression Integer
--E

--S 32      14:132 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R      (3)  0
--R
                                         Type: Expression Integer
--E

```

```

9 [1]:14.133      
$$\int \frac{x \, dx}{(x^2 + a^2)^2}$$


$$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{-1}{2(x^2 + a^2)}$$


$$(*)+≡$$

)clear all

--S 33
aa:=integrate(x/((x^2+a^2)^2),x)
--R
--R
--R      1
--R      (1)  - -----
--R                  2      2
--R                  2x    + 2a
--R
--E                                         Type: Union(Expression Integer,...)

--S 34
bb:=-1/(2*(x^2+a^2))
--R
--R      1
--R      (2)  - -----
--R                  2      2
--R                  2x    + 2a
--R
--E                                         Type: Fraction Polynomial Integer

--S 35      14:133 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R      (3)  0
--R
--E                                         Type: Expression Integer

```

```

10 [1]:14.134      
$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}$$


$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{-x}{2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$


$$\langle * \rangle + \equiv$$


$$)clear all$$


$$\text{--S 36}$$


$$\text{aa:=integrate}(x^2/((x^2+a^2)^2),x)$$


$$\text{--R}$$


$$\text{--R}$$


$$\text{--R} \quad \frac{(x^2 + a^2)\text{atan}(-) - a x}{a}$$


$$\text{--R} \quad (1) \quad \frac{(x^2 + a^2)\text{atan}(-) - a x}{2a x^2 + 2a}$$


$$\text{--R}$$


$$\text{--E} \quad \text{Type: Union(Expression Integer,...)}$$


$$\text{--S 37}$$


$$\text{bb:=-x/(2*(x^2+a^2))+1/(2*a)*atan(x/a)}$$


$$\text{--R}$$


$$\text{--R} \quad \frac{(x^2 + a^2)\text{atan}(-) - a x}{a}$$


$$\text{--R} \quad (2) \quad \frac{(x^2 + a^2)\text{atan}(-) - a x}{2a x^2 + 2a}$$


$$\text{--R}$$


$$\text{--E} \quad \text{Type: Expression Integer}$$


$$\text{--S 38} \quad 14:134 \text{ Schaums and Axiom agree}$$


$$\text{cc:=aa-bb}$$


$$\text{--R}$$


$$\text{--R} \quad (3) \quad 0$$


$$\text{--R}$$


$$\text{--E} \quad \text{Type: Expression Integer}$$


```

```

11 [1]:14.135      
$$\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + a^2)^2}$$


$$\int \frac{x^3}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{a^2}{2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2)$$


$$\langle * \rangle + \equiv$$


$$)clear all$$


$$\text{--S 39}$$


$$\text{aa:=integrate}(x^3/((x^2+a^2)^2),x)$$


$$\text{--R}$$


$$\text{--R}$$


$$\text{--R} \quad \frac{(x^2 + a^2)^2 \log(x^2 + a^2) + a^2}{2x^2 + 2a}$$


$$\text{--R} \quad (1) \quad \frac{(x^2 + a^2)^2 \log(x^2 + a^2) + a^2}{2x^2 + 2a}$$


$$\text{--R} \quad \text{Type: Union(Expression Integer,...)}$$


$$\text{--E}$$


$$\text{--S 40}$$


$$\text{bb:=a}^2/(2*(x^2+a^2))+1/2*\log(x^2+a^2)$$


$$\text{--R}$$


$$\text{--R} \quad \frac{(x^2 + a^2)^2 \log(x^2 + a^2) + a^2}{2x^2 + 2a}$$


$$\text{--R} \quad (2) \quad \frac{(x^2 + a^2)^2 \log(x^2 + a^2) + a^2}{2x^2 + 2a}$$


$$\text{--R} \quad \text{Type: Expression Integer}$$


$$\text{--E}$$


$$\text{--S 41} \quad 14:135 \text{ Schaums and Axiom agree}$$


$$\text{cc:=aa-bb}$$


$$\text{--R}$$


$$\text{--R} \quad (3) \quad 0$$


$$\text{--R} \quad \text{Type: Expression Integer}$$


$$\text{--E}$$


```

12 [1]:14.136 $\int \frac{dx}{x(x^2 + a^2)^2}$

$$\int \frac{1}{x(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^4} \ln \left(\frac{x^2}{x^2 + a^2} \right)$$

$$\langle * \rangle + \equiv$$

$$)clear all$$

--S 42
aa:=integrate(1/(x*(x^2+a^2)^2),x)
--R
--R
--R
--R
$$(1) \frac{(-x^2 - a^2)\log(x^2 + a^2) + (2x^4 + 2a^2)\log(x) + a^2}{2a^4 x^4 + 2a^6}$$
--R
--R
--E
Type: Union(Expression Integer,...)

--S 43
bb:=1/(2*a^2*(x^2+a^2))+1/(2*a^4)*log(x^2/(x^2+a^2))
--R
--R
--R
$$(2) \frac{(x^2 + a^2)\log(\frac{x^2}{x^2 + a^2}) + a^2}{2a^4 x^4 + 2a^6}$$
--R
--R
--E
Type: Expression Integer

--S 44
cc:=aa-bb
--R
--R
--R
$$(3) \frac{-\log(x^2 + a^2) + 2\log(x) - \log(\frac{x^2}{x^2 + a^2})}{2a^4}$$
--R
--R

```

--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 45
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
--R
--R           a
--R   (4)  log(--) == - log(b) + log(a)
--R           b
--R                                         Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 46
dd:=divlog cc
--R
--R           2
--R           - log(x ) + 2log(x)
--R   (5)  -----
--R           4
--R           2a
--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 47
logpow:=rule(log(a^n) == n*log(a))
--R
--R           n
--R   (6)  log(a ) == n log(a)
--R                                         Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 48      14:136 Schaums and Axiom agree
ee:=logpow dd
--R
--R   (7)  0
--R                                         Type: Expression Integer
--E

```

13 [1]:14.137 $\int \frac{dx}{x^2(x^2 + a^2)^2}$

$$\int \frac{1}{x^2(x^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{a^4 x} - \frac{x}{2a^4(x^2 + a^2)} - \frac{3}{2a^5} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$
 $(*)+≡$
)clear all

--S 49
aa:=integrate(1/(x^2*(x^2+a^2)^2),x)
--R
--R
$$\frac{(-3x^3 - 3ax^2)\operatorname{atan}(-) - 3ax^2 - 2a^3}{2a^5x^5 + 2a^3x^3}$$

--R (1)
$$\frac{(-3x^3 - 3ax^2)\operatorname{atan}(-) - 3ax^2 - 2a^3}{2a^5x^5 + 2a^3x^3}$$

--R
--E

--S 50
bb:=-1/(a^4*x)-x/(2*a^4*(x^2+a^2))-3/(2*a^5)*atan(x/a)
--R
--R
$$\frac{(-3x^3 - 3ax^2)\operatorname{atan}(-) - 3ax^2 - 2a^3}{2a^5x^5 + 2a^3x^3}$$

--R (2)
$$\frac{(-3x^3 - 3ax^2)\operatorname{atan}(-) - 3ax^2 - 2a^3}{2a^5x^5 + 2a^3x^3}$$

--R
--E

--S 51 14:137 Schaums and Axiom agree
cc:=aa-bb
--R
--R (3) 0
--R
--E

14 [1]:14.138 $\int \frac{dx}{x^3(x^2 + a^2)^2}$

$$\int \frac{1}{x^3(x^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{1}{2a^4(x^2 + a^2)} - \frac{1}{a^6} \ln \left(\frac{x^2}{x^2 + a^2} \right)$$

(*)+≡
)clear all

```

--S 52
aa:=integrate(1/(x^3*(x^2+a^2)^2),x)
--R
--R
--R
--R      4      2 2      2      2      4      2 2      2 2      4
--R      (2x  + 2ax )log(x  + a ) + (- 4x  - 4ax )log(x) - 2ax  - a
--R      (1) -----
--R                           6 4      8 2
--R                           2ax  + 2ax
--R                                         Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 53
bb:=-1/(2*a^4*x^2)-1/(2*a^4*(x^2+a^2))-1/a^6*log(x^2/(x^2+a^2))
--R
--R
--R      2
--R      4      2 2      x      2 2      4
--R      (- 2x  - 2ax )log(-----) - 2ax  - a
--R                           2      2
--R                           x  + a
--R      (2) -----
--R                           6 4      8 2
--R                           2ax  + 2ax
--R                                         Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 54
cc:=aa-bb
--R
--R
--R      2      2      x
--R      log(x  + a ) - 2log(x) + log(-----)
--R                                         2      2
--R                                         x  + a
--R      (3) -----
--R                                         6
--R                                         a

```

```

--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 55
divlog:=rule(log(a/b) == log(a) - log(b))
--R
--R           a
--R   (4)  log(--) == - log(b) + log(a)
--R           b
--R                                         Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 56
dd:=divlog cc
--R
--R           2
--R           log(x ) - 2log(x)
--R   (5)  -----
--R           6
--R           a
--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 57
logpow:=rule(log(a^n) == n*log(a))
--R
--R           n
--R   (6)  log(a ) == n log(a)
--R                                         Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

--S 58      14:138 Schaums and Axiom agree
ee:=logpow dd
--R
--R   (7)  0
--R                                         Type: Expression Integer
--E

```

15 [1]:14.139 $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$
 $\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}}$
 $\langle *\rangle + \equiv$
 $\)clear all$

--S 59 14:139 Axiom cannot do this integral
aa:=integrate(1/((x^2+a^2)^n),x)
--R
--R
--R
--R x
--R ++ 1
--R (1) | ----- d%L
--R ++ 2 2 n
--R (a + %L)
--R
--E Type: Union(Expression Integer,...)


```

explog:=rule(%e^(n*log(x)) == x^n)
--R
--R           n log(x)      n
--R   (4)  %e          == x
--R                                         Type: RewriteRule(Integer, Integer, Expression Integer)
--E

--S 64
dd:=explog cc
--R
--R           2 2 n      2 2 2 2 n - 1
--R   (x + a ) + (- x - a )(x + a )
--R   (5)  -----
--R           2 2 n - 1 2 2 n
--R           (2n - 2)(x + a )     (x + a )
--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 65      14:140 Schaums and Axiom agree
ee:=complexNormalize dd
--R
--R   (6)  0
--R                                         Type: Expression Integer
--E

```

17 [1]:14.141 $\int \frac{dx}{x(x^2 + a^2)^n}$

$$\int \frac{1}{x(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{x(x^2 + a^2)^{n-1}}$$

$\langle *\rangle +\equiv$
)clear all

```

--S 66      14:141 Axiom cannot do this integral
aa:=integrate(1/(x*(x^2+a^2)^n),x)
--R
--R
--R           x
--R           ++      1
--R   (1)  |  ----- d%L
--R           ++      2 2 n
--R           %L (a  + %L )
--R                                         Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```


References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 p64