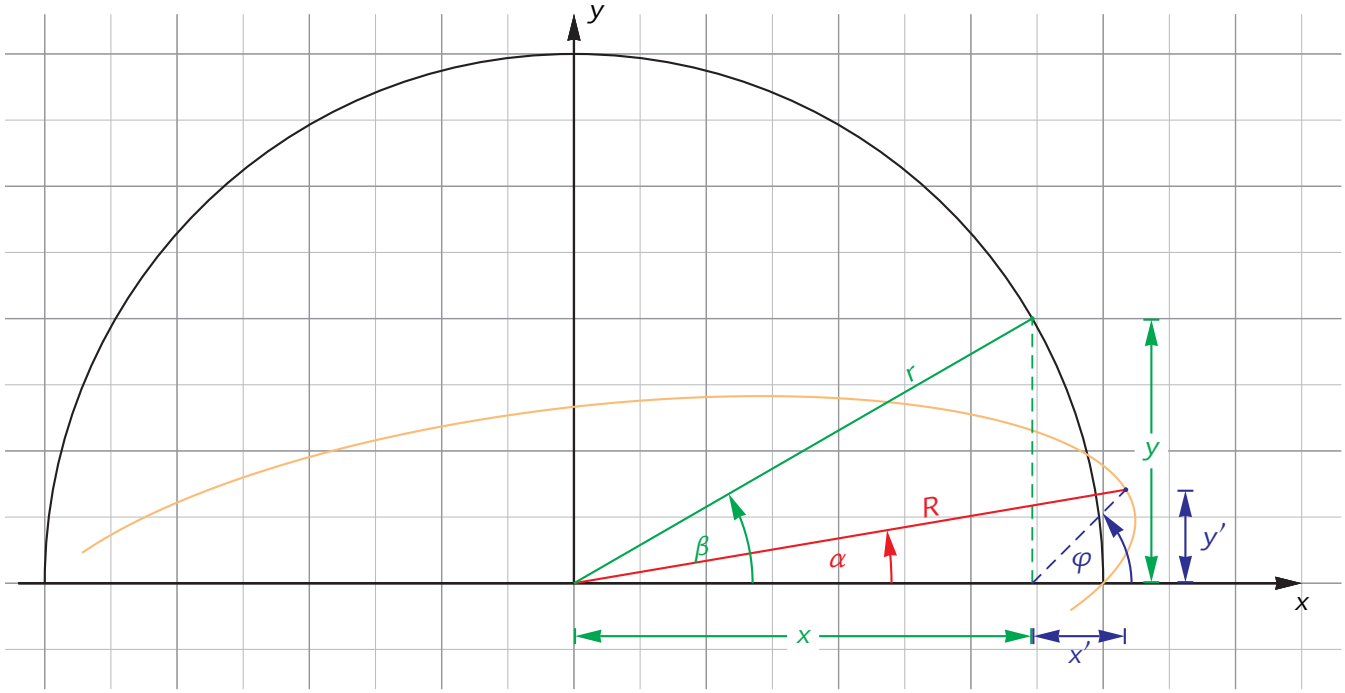
1 Mathematische Grundlagen zur Parallelprojektion eines Kreises

Das Schrägbild eines Kreises ergibt eine Ellipse, allerdings stimmt der Radius der Ellipse nicht mit der großen Halbachse der Ellipse überein. Außerdem ist die Ellipsenachse gegen den Kreisdurchmesser um einen Winkel α gedreht.



Drehwinkel und Halbachse der Ellipse sollen nun ermittelt werden.
Für den Kreis im ersten und zweiten Quadranten gilt: $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$
Die Entfernung der Ellipsenpunkte vom Mittelpunkt des Kreises sei R.
Mit Pythagoras gilt dann: $R(x) = \sqrt{(x + x')^2 + y'^2}$, wobei
$y' = y \cdot v \cdot \sin(\varphi)$ mit dem Verkürzungsfaktor v und dem Verzerrungswinkel φ.
x' und y' erhält man über den Verzerrungswinkel und den Verkürzungsfaktor:
$x' = y \cdot v \cdot \cos(\varphi)$ und $y' = y \cdot v \cdot \sin(\varphi)$.

$$R(x) = \sqrt{(x + y \cdot v \cdot \cos(\varphi))^2 + (y \cdot v \cdot \sin(\varphi))^2}$$

$$R(x) = \sqrt{\left(x + \sqrt{r^2 - x^2} \cdot v \cdot \cos(\varphi)\right)^2 + \left(\sqrt{r^2 - x^2} \cdot v \cdot \sin(\varphi)\right)^2}$$

Ausmultiplizieren und zusammenfassen (trigonometrischer Pythagoras!):

$$R(x) = \sqrt{x^2 \cdot (1 - v^2) + r^2 v^2 + 2xv \cdot \cos(\varphi)\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Die beiden Extremwerte dieser Funktion liefern die x-Werte des Kreises, die zur großen und zur kleinen Halbachse der Ellipse gehören. Diese werden nun bestimmt indem nicht $R(x)$, sondern $(R(x))^2$ betrachtet wird, denn die Extremwerte von $(R(x))^2$ sind auch die von $R(x)$; man spart sich die Wurzel!)

$$R(x)^2 = x^2 \cdot \left(1 - v^2\right) + r^2 v^2 + 2xv \cdot \cos(\varphi)\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\left(R(x)^2\right)' = 2x(1 - v^2) + 2v\cos(\varphi) \cdot \frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Nullsetzen dieser Ableitung liefert vier Lösungen, die paarweise symmetrisch sind:

$$x_{1/3} = \pm\frac{r}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{v^4 + 4v^2\cos^2(\varphi) - 2v^2 + 1 + \sqrt{(v^2 - 1)^2\left(v^4 + 4v^2\cos^2(\varphi) - 2v^2 + 1\right)}}{v^4 + 4v^2\cos^2(\varphi) - 2v^2 + 1}}$$

$$x_{2/4} = \pm\frac{r}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{v^4+4v^2\cos^2(\varphi)-2v^2-\sqrt{(v^2-1)^2\left(v^4+4v^2\cos^2(\varphi)-2v^2+1\right)}}{v^4+4v^2\cos^2(\varphi)-2v^2+1}}$$

Eine weitere Vereinfachung lässt sich durch die Beziehung $2\cos^2(\varphi)-1=\cos(2\varphi)$ erreichen:

$$x_{1/3} = \pm\frac{r}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{v^4+2v^2\cos(2\varphi)+1+(v^2-1)\sqrt{v^4+2v^2\cos(2\varphi)+1}}{v^4+2v^2\cos(2\varphi)+1}}$$

$$x_{2/4} = \pm\frac{r}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{v^4+2v^2\cos(2\varphi)+1-(v^2-1)\sqrt{v^4+2v^2\cos(2\varphi)+1}}{v^4+2v^2\cos(2\varphi)+1}}$$

Nochmals unter der Wurzel gekürzt und zusammengefasst und mit der Abkürzung : $t=\frac{1-v^2}{\sqrt{v^4+2v^2\cos(2\varphi)+1}}$:

$$x_{1/2/3/4} = \pm\frac{r}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{1\pm\frac{v^2-1}{\sqrt{v^4+2v^2\cos(2\varphi)+1}}} = \pm\frac{r}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{1\pm t}$$

Die Ergebnisse nun wieder in $R(x)$ eingesetzt liefert die beiden Halbachsen:

$$R(x_1) = r\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1-v^2}{\sqrt{v^4+2v^2\cos(2\varphi)+1}}\right)\cdot(1-v^2)+v^2+v\cdot\cos(\varphi)\sqrt{1-\frac{(1-v^2)^2}{v^4+2v^2\cos(2\varphi)+1}}}$$

$$R(x_1) = r\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(1+t)\cdot(1-v^2)+v^2+v\cdot\cos(\varphi)\sqrt{1-t^2}}$$

$$R(x_2) = r\cdot\sqrt{\frac{1}{2}(1-t)\cdot(1-v^2)+v^2-v\cdot\cos(\varphi)\sqrt{1-t^2}}$$

Der Skizze entnimmt man, dass sich der Winkel β über $\arccos\left(\frac{x}{r}\right)$ bzw. $\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$ berechnen lässt:

$$\beta = \arccos\left(\frac{x_1}{r}\right) = \arcsin\left(\frac{x_2}{r}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\frac{1-v^2}{\sqrt{v^4+2v^2\cos(2\varphi)+1}}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-t}\right)$$

Der Winkel α ergibt sich folgendermaßen:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{y'}{R}\right) = \arcsin\left(\frac{y\cdot v\cdot\sin(\varphi)}{R}\right) = \arcsin\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-t}\cdot v\cdot\sin(\varphi)}{\sqrt{\frac{1}{2}(1+t)\cdot(1-v^2)+v^2+v\cdot\cos(\varphi)\sqrt{1-t^2}}}\right)$$

1.1 Polarkoordinaten

$$\tan 2\beta = \frac{2v\cos\varphi}{1-v^2} \qquad \tan\alpha = \frac{\tan\varphi}{\frac{1}{v\cos\varphi\tan\beta}+1}$$

$$R_{\max} = r\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\arctan\left[\frac{2v\cos\varphi}{1-v^2}\right]\right)\right)(1-v^2)+v^2+v\cos\varphi\cdot\sin\left(\arctan\left[\frac{2v\cos\varphi}{1-v^2}\right]\right)}$$

1.2 Spezialfall $\varphi = 45°$, $v = 0,5$

Die Terme lassen sich nochmals vereinfachen und man erhält mit $t=\frac{3\cdot\sqrt{17}}{17}$:

$$x_1 = \frac{r}{34}\sqrt{578+102\sqrt{17}} \approx r\cdot 0,9294102631; \qquad x_2 = -\frac{r}{34}\sqrt{578-102\sqrt{17}} \approx -r\cdot 0,369048184$$

Daraus berechnet man die große und die kleine Halbachse, sowie die beiden Winkel zu:

$$a = R(x_1) = \frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{17}} \approx r \cdot 1{,}067889602$$

$$b = R(x_2) = \frac{r}{4}\sqrt{10-2\sqrt{17}} \approx r \cdot 0{,}3310767232$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{1}{34}\sqrt{578-102\sqrt{17}}\right) \approx 21{,}65692833°$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{1-\frac{3\cdot\sqrt{17}}{17}}}{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{17}}}\right) \approx 7{,}018121736°$$